Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ (globalement lipschitzien)

On considère l'équation différentielle de la forme

$$y' = f(t,y) \quad (t,y) \in \Omega,\ t \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{K}^N \quad (\mathcal{E})$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$.

ÉNONCÉ :

Théorème : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ continue et globalement lispchitzienne par rapport à la variable d'état uniformément par rapport à la variable de temps. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$. Alors il existe une unique solution globale $y : I \to \mathbb{K}^N$ de $(\mathcal{E})$ telle que $y(t_0) = y_0$.

DÉVELOPPEMENT :

LEMME : (**Zone lipschitzienne**) : Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{K}^N$, $\alpha, \beta \in [0, +\infty[$ non tous deux nuls. Posons $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$. Soit $f : I \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, uniformément par rapport à la variable de temps.
Alors il existe une unique solution globale $y : I \to \mathbb{K}^N$ de (ϵ) telle que $y(t_0) = y_0$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $k > 0$ tel que

$$||f(t, y_1) - f(t, y_2)|| \leq k||y_1 - y_2||$$

pour tous $y_1, y_2 \in \mathbb{K}^N$ et tout $t \in I$. Remarquons que l'espace E est un espace de BANACH et Φ est une application de E dans lui-même. Donnons-nous $y, \tilde{y} \in E$. Voyons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $\Phi^p(y), \Phi^p(\tilde{y}) \in E$ vérifient l'inégalité :

$$\forall t \in I, \quad ||\Phi^p(y)(t) - \Phi^p(\tilde{y})(t)|| \leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} ||y - \tilde{y}||_E$$

Pour $p = 0$:

$$||\Phi^0(y)(t) - \Phi^0(\tilde{y})(t))|| = ||y(t) - \tilde{y}(t)|| \leq ||y - \tilde{y}||_E$$

Hérédité : Supposons le résultat vrai au rang $p \in \mathbb{N}$. Comme f est lipschitzienne, on a pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} ||\Phi^{p+1}(y)(t) - \Phi^{p+1}(\tilde{y})|| &\leq \int_{t_0}^t ||f(s, \Phi^p(y)(s)) - f(s, \Phi^p(\tilde{y})(s))|| ds \\ &\leq k \int_{t_0}^t ||\Phi^p(y)(s) - \Phi^p(\tilde{y})(s)|| ds \\ &\leq k \int_{t_0}^t k^p \frac{(s - t_0)^p}{p!} ||y - \tilde{y}|| ds \\ &\leq k^{p+1} \frac{(t - t_0)^{p+1}}{(p+1)!} ||y - \tilde{y}|| \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. De même pour $t \in I, t < t_0$, on a :

$$||\Phi^{p+1}(y)(t) - \Phi^{p+1}(\tilde{y})|| \leq k^{p+1} \frac{(t_0 - t)^{p+1}}{(p+1)!} ||y - \tilde{y}||_E$$

d'où le résultat.
Posons $\gamma = \max(\alpha, \beta)$. On a alors :

$$\forall t \in I, \quad ||\Phi^p(y)(t) - \Phi^p(\tilde{y})(t)|| \leq k^p \frac{\max(\alpha, \beta)^p}{p!} ||y - \tilde{y}||_E$$

Par passage à la borne supérieure sur I, nous obtenons :

$$||\Phi^p(y) - \Phi^p(\tilde{y})||_E \leq k^p \frac{\gamma^p}{p!} ||y - \tilde{y}||_E$$

Mais comme la série de terme général $k^p \frac{\gamma^p}{p!}$ converge, il vient que $\lim\limits_{p \to +\infty} k^p \frac{\gamma^p}{p!} = 0$. On dispose donc d'un p_0 tel que $k^{p_0} \frac{\gamma^{p_0}}{p_0!} \in [0, 1[$. Ainsi, Φ^{p_0} est une contraction sur $(E, ||.||_E)$. Par le THÉORÈME DU POINT FIXE ITÉRÉ, Φ admet un point fixe dans E. On en déduit que le problème (ϵ) admet une unique solution sur I vérifiant $y(t_0) = y_0$. □

Démonstration. (*théorème*) : Le cas d'un intervalle I compact est trivial en appliquant le lemme. Passons au cas d'un intervalle quelconque.

- Unicité : Soient $y, \tilde{y} : I \to \mathbb{K}^N$ deux solutions de $y' = f(t, y)$ telles que $y(t_0) = y_0 = \tilde{y}(t_0)$. Soit $t \in I$. Il existe $\alpha, \beta \geq 0$ non tous deux nuls tels que $t \in J := [t_0 - \alpha, t_0 + \beta] \subset I$. Le cas des compacts donne alors $y(s) = \tilde{y}(s)$ pour tout $s \in J$. En particulier, $y(t) = \tilde{y}(t)$ pour $t \in I$ arbitraire, d'où le résultat.
- Existence : Pour tout intervalle compact $J = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta] \subset I$, on a une solution unique sur J notée y_J par ce qui précède. Pour $t \in I$, on pose alors $y(t) = y_J(t)$ avec n'importe quel $J = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta] \subset I$ contenant t. La fonction y est solution de l'équation différentielle, car en tout point t, elle coïncide avec une solution de l'équation différentielle.

□

Remarques :

- Il faut bien entendu savoir ce qu'il se passe dans le cas plus général (local) et la différence de la nature des solutions (globale $\neq$ maximale).